Name:

Mat.Nr.:

Studienkennz.:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

105.078 Einfuehrung in Stochastische Prozesse und Zeitreihenanalyse
Vorlesung, 2008S, 3.0h
30. Juni 2008
Hubalek/Scherrer

(Dauer 90 Minuten, alle Unterlagen sind erlaubt)

Anmeldung zur mündlichen Prüfung auf der Liste!

Bsp.	Max.	Punkte
1	5	
2	5	
3	5	
4	5	
$\sum$	20	

1. (y_t) sei ein ARMA(1,1) Prozess:
$$y_t = 0.5y_{t-1} + \epsilon_t - 2\epsilon_{t-1}$$
wobei (ϵ_t) ein weisses Rauschen mit Varianz $\mathbb{E}\epsilon_t^2 = 1/4$ ist. Bitte berechnen Sie das Spektrum des Prozesses (y_t) und machen Sie eine Skizze des Spektrums.

   Was fällt Ihnen dabei auf? Welche der Standard-Annahmen an einen ARMA Prozess sind hier nicht erfüllt? .

2. Gegeben sei eine Zahl $\sigma > 0$ und eine iid Folge $(X_k)_{k\geq 1}$ von $N(0, \sigma^2)$-Zufallsvariablen. Weiters sei $(S_n)_{n\geq 0}$ die entsprechende Partialsummenfolge, und $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ die von S erzeugte Filtration, also gilt $\mathcal{F}_n = \sigma(S_0, \ldots, S_n)$ für $n \geq 0$.
   (a) Zeigen Sie: $(S_n)_{n\geq 0}$ ist ein Martingal.
   (b) Berechnen Sie $\mathbb{E}[S_n^2]$.
   (c) Berechnen Sie $\mathbb{E}[S_n^2|\mathcal{F}_{n-1}]$.
   (d) Finden Sie einen möglichst einfachen Ausdruck für den vorhersehbaren Anteil A_n in der Doob-Zerlegung $S_n^2 = M_n + A_n$.
   (e) Zeigen Sie: $(S_n^4)_{n\geq 0}$ ist ein Submartingal.

3. (y_t) sei ein AR(2) Prozess:
$$y_t = 0.5y_{t-1} + 0.1y_{t-2} + \epsilon_t$$
wobei (ϵ_t) ein weisses Rauschen mit Varianz $\mathbb{E}\epsilon_t^2 = 1$ ist. Die Autokovarianzfunktion des Prozesses ist $\gamma(0) = 1.4610$, $\gamma(1) = 0.8117$, $\gamma(2) = 0.5519$, $\gamma(3) = 0.3571$, ...

   Bitte berechnen Sie folgende Prognosen (Prädiktoren) und die zugehörige Prognosefehler-Varianz:
   (a) Einschritt-Prognose aus einem Wert: $y_{t+1|t,1}$ (und die Prognosefehler-Varianz $\sigma_{1,1}^2$)
   (b) Einschritt-Prognose aus zwei Werten: $y_{t+1|t,2}$ (und die Prognosefehler-Varianz $\sigma_{1,2}^2$)
   (c) Einschritt-Prognose aus drei Werten: $y_{t+1|t,3}$ (und die Prognosefehler-Varianz $\sigma_{1,3}^2$)
   (d) Zweischritt-Prognose aus zwei Werten: $y_{t+2|t,2}$ (die Prognosefehler-Varianz $\sigma_{2,2}^2$ ist für diesen Fall nicht zu berechnen!)

.

4. (a) Es sei $(Z(t) : t \geq 0)$ ein Poissonprozeß mit Parameter $\lambda = 4$. Berechnen Sie die bedingte Erwartung $\mathbb{E}[Z(3)|Z(1)]$.
   (b) Berechnen Sie das gemischte Moment $\mu_{21}(1, 3) = \mathbb{E}[Z(1)^2 Z(3)]$.
   Sie können und sollen (ohne Beweis) folgendes Resultat verwenden. Ist N eine Poissonverteilte Zufallsvariable mit $\mathbb{E}[N] = \nu$, dann gilt $\mathbb{E}[N^2] = \nu + \nu^2$ und $\mathbb{E}[N^3] = \nu + 3\nu^2 + \nu^3$.
   (c) Sei $(X(t), 0 \leq t \leq 1)$ eine Brownsche Brücke, also ein Gaußscher Prozeß mit stetigen Trajektorien, sowie $\mathbb{E}[X(t)] = 0$ und $\mathrm{Cov}(X(s), X(t)) = s(1 - t)$ für $0 \leq s \leq t \leq 1$. Weiters sei Y eine von X unabhängige $N(0, 1)$-Zufallsvariable und $W(t) = X(t) + tY$ für $0 \leq t \leq 1$.
   Begründen Sie kurz, warum die endlichdimensionalen Verteilungen von $(W(t), 0 \leq t \leq 1)$ multivariate Normalverteilungen sind.
   (d) Berechnen Sie die Mittelwert- und Kovarianz-Funktion $m(t) = \mathbb{E}[W(t)]$ und $\Gamma(s, t) = \mathrm{Cov}[W(s), W(t)]$ für $0 \leq s \leq t \leq 1$.
   (e) Ist W eine Brownsche Bewegung auf $[0, 1]$? (Kurze Diskussion, Begründung.)