Name:

Mat.Nr.:

Studienkennz.:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

105.078 Einfuehrung in Stochastische Prozesse und Zeitreihenanalyse
Vorlesung, 2008S, 3.0h
Oktober 2008
Hubalek/Scherrer

(Dauer 90 Minuten, alle Unterlagen sind erlaubt)

Anmeldung zur mündlichen Prüfung auf der Liste!

Bsp.	Max.	Punkte
1	5	
2	5	
3	5	
4	5	
$\sum$	20	

1. (y_t) sei ein AR(1) Prozess definiert durch:

$$y_t = -2y_{t-1} + \epsilon_t$$

wobei (ϵ_t) ein weißes Rauschen mit Varianz $E\epsilon_t^2 = 1$ ist. (Achtung $|-2| > 1$!)

   (a) Berechnen Sie die Autokovarianzfunktion $\gamma(k), k = 0, 1, \ldots$ von (y_t).

   (b) Verwenden Sie die Yule-Walker Gleichungen, um eine AR(1) Darstellung der Form

   $$y_t = ay_{t-1} + \eta_t$$

   mit $|a| < 1$ zu erhalten. (Berechnen Sie a und die Varianz des weißen Rauschen (η_t).)

   (c) Berechnen Sie die Einschritt Prognose $y_{t+1|t,1}$ und die entsprechende Prognosefehler-Varianz $\sigma^2_{1,1}$.

.

2. Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit einer Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und ein adaptierter stochastischer Prozeß $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Weiters sei durch

$$Y_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} Y_{k-1}\Delta X_k$$

ein weiterer Prozeß $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $\Delta X_k = X_k - X_{k-1}$. Wir setzen voraus, daß $E[|Y_n|] < \infty \ \forall n \in \mathbb{N}$ gilt.

   (a) Zeigen/begründen Sie, daß $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezüglich $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ adaptiert ist.

   (b) Zeigen Sie: Ist X ein Martingal, dann auch Y.

   (c) Angenommen X ist ein Martingal. Berechnen Sie $E[Y_n]$.

   (d) Angenommen X ist kein Martingal, besitzt aber die Doob-Zerlegung $X = M + A$, wobei M ein Martingal und A vorhersehbar ist. Bestimmen Sie dann die Doob-Zerlegung $Y = N + B$, wobei N ein Martingal und B vorhersehbar sein soll.

   (e) Drücken Sie Y_n ohne Rekursion durch $\Delta X_1, \ldots, \Delta X_n$ aus. Hinweis: Betrachten Sie die Inkremente von Y.

3. (ϵ_t) sei weißes Rauschen mit Varianz $E\epsilon_t^2 = 1$. Betrachten Sie folgende Differenzengleichungen:

   (a) $y_t = -y_{t-1}$

   (b) $y_t = -y_{t-1} + \epsilon_t$

   (c) $y_t = -y_{t-1} + \epsilon_t + \epsilon_{t-1}$

   (d) $y_t = -y_{t-1} - (3/16)y_{t-2}$

   (e) $y_t = -y_{t-1} - (3/16)y_{t-2} + \epsilon_t$

Existiert eine stationäre Lösung (y_t) und wenn ja, ist diese eindeutig? .

4. Gegeben seien zwei unabhängige standard Brownsche Bewegungen $(X(t), t \geq 0)$ und $(Y(t), t \geq 0)$, adaptiert zu einer Filtration $(\mathcal{F}(t), t \geq 0)$, sowie eine Zahl $\rho \in [-1, 1]$.

   (a) Ist $X(t)^2$ ein Martingal, ein Sub- oder ein Supermartingal? (Kurze Begründung)

   (b) Sei $S(t) = \rho X(t) + \sqrt{1-\rho^2}Y(t)$. Berechnen Sie $E[S(t)]$ und $Var[S(t)]$.

   (c) Ist S eine Brownsche Bewegung? (Begründung)

   (d) Ist $Z(t) = X(t)Y(t)$ ein Martingal? (Begründung)

   (e) Angenommen $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ ist eine beschränkte stetige Funktion und $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_n$. Welche Verteilung hat die Zufallsvariable

   $$U = \sum_{k=1}^{n} f(t_{k-1})\Delta X(t_k),$$

   wobei $\Delta X(t_k) = X(t_k) - X(t_{k-1})$. Geben Sie auch $E[U]$ und $Var[U]$ an.