Name:

Mat.Nr.:

Studienkennz.: ☐ Exchange student (Erasmus, ...)

Bitte keinen Rotstift verwenden!

105.078 Einführung in Stochastische Prozesse und Zeitreihenanalyse
Vorlesung, 2010S, 3.0h
16.Mai 2011
Hubalek/Scherrer

(Dauer 90 Minuten, alle Unterlagen sind erlaubt)

Termine zur mündlichen Prüfung werden per Email bekanntgegeben bzw. nach Vereinbarung mit den Prüfern.

1. A_1, A_2 seien zwei Zufallsvariable mit Erwartungswert $\mathbf{E}A_i = \mu_i$, Varianz $\mathbf{Var}(A_i) = \sigma_i^2$ und einer Kovarianz $\mathbf{Cov}(A_1, A_2) = \sigma_{12}$. Betrachten Sie den Prozess

$$y_t = 1^t A_1 + (-1)^t A_2,\ t \in \mathbb{Z}$$

   (a) Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbf{E}y_t$ und die Kovarianz $\mathbf{Cov}(y_{t+k}, y_t)$ für t, $k \in \mathbb{Z}$.

   (b) Für welche Parameterwerte $\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2$ und σ_{12} ist der Prozess (y_t) schwach stationär?

2. Sei $\{W(t) : t \geq 0\}$ eine Brownsche Bewegung, $\{\mathcal{F}(t) : t \geq 0\}$ die von ihr erzeugte Filtration, und seien $0 \leq t_1 < t_2$ fest vorgegebene Zahlen.

   (a) Berechnen Sie $E[W(t_1)^2 W(t_2)|\mathcal{F}(t)]$. Unterscheiden Sie dabei $t > t_2$, $t_1 < t \leq t_2$, $0 \leq t \leq t_1$.

   (b) Sei

$$Z(t) = 1_{[0,3)}(t) W(\lfloor t \rfloor), \quad t \geq 0,$$

   wobei $\lfloor . \rfloor$ wie üblich die Abrundungsfunktion (Gauß-Klammer) und $1_{[0,3)}(.)$ die Indikatorfunktion des Intervalls $[0, 3)$ bezeichnet.[1]

   Skizzieren Sie einen typischen Pfad (i) von $\{W(t) : t \geq 0\}$ und (ii) von $\{Z(t) : t \geq 0\}$ für $0 \leq t \leq 3$. Verwenden Sie bitte möglichst die Koordinatensysteme auf der nächsten Seite.

   (c) Begründen Sie sorgfältig, warum der Prozess $\{Z(t) : t \geq 0\}$ in M^2_{step} liegt. (Zufällige Treppenfunktion, Bezeichnung wie in Vorlesung bzw. Buch.)

   (d) Wir betrachten nun das stochastische Integral

$$Y(t) = \int_0^t Z(s) dW(s),$$

   Finden Sie einen möglichst einfachen Ausdruck für $Y(2)$ und $Y(3)$! („Rechnen Sie das Integral für $t = 2$ und $t = 3$ aus!")

   (e) Berechenen Sie $E[Y(3)^2]$ mit der Itô-Isometrie.[2]

3. Sei $(\eta_n)_{n\geq 1}$ eine iid Folge von exponentialverteilten Zufallsvariablen mit $E[\eta_n] = 1$. Weiters sei

$$\xi_n = \prod_{k=1}^{n} \eta_k \quad (n \geq 1).$$

   (a) Ist $(\xi_n^2)_{n\geq 1}$ ein Martingal, ein Submartingal, ein Supermartingal, oder überhaupt kein Smartingal? (Begründung!)

   (b) Begründen Sie sorgfältig, warum $(\xi_n)_{n\geq 1}$ ein Martingal ist.

   (c) Finden Sie eine obere Schranke für $E\left[\left(\max_{k\leq n} \xi_k\right)^2\right]$.

   (d) Geben Sie eine einfache nichttriviale[3] obere Schranke für $P\left[\max_{k\leq n} \xi_k > 2\right]$ an.

   (e) Ist $\left(\frac{1}{\xi_n}\right)_{n\geq 1}$ ein Martingal, ein Submartingal, ein Supermartingal, oder überhaupt kein Smartingal? (Begründung!)

4. (ϵ_t) sei weißes Rauschen mit Varianz $\mathbb{E}\epsilon_t^2 = 1$. Weiters sind zwei lineare Filter $a(L) = 1 + L$ und $b(L) = 1 - L$ gegegeben. (L ist der Lag-Operator.) Betrachten Sie die folgenden MA Prozese und berechnen Sie deren Auto-Kovarianzfunktion $\gamma(k)$:

   (a) $y_t = a(L)\epsilon_t$

   (b) $y_t = b(L)\epsilon_t$

   (c) $y_t = a(L)b(L)\epsilon_t$

   (d) $y_t = b(L)a(L)\epsilon_t$

   (e) $y_t = a(L)\epsilon_t + b(L)\epsilon_t$

---

[1] Für eine reelle Zahl x ist $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist:

$$\lfloor x \rfloor = \max_{k\in\mathbb{Z}, k\leq x} k.$$

[2] Vertauschen von Integral und Erwartungswert nach dem Satz von Fubini müssen Sie (bei dieser Prüfung) nicht streng rechtfertigen.

[3] D.h. $P(\ldots) \leq 1$ oder schlechter gilt nicht!

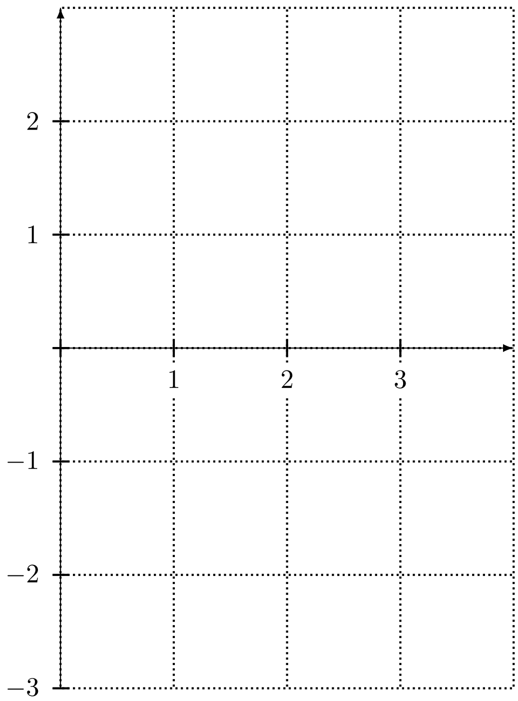

Abbildung 1: Pfad von W

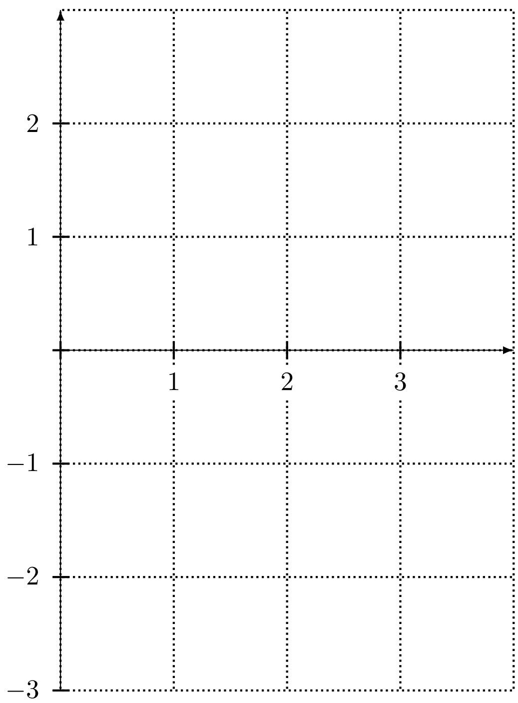

Abbildung 2: Pfad von Z