Name:

Mat.Nr.:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

105.078 Einführung in Stochastische Prozesse und Zeitreihenanalyse

Vorlesung, 2010S, 3.0h

April 2012

Hubalek/Scherrer

(Dauer 90 Minuten, alle Unterlagen sind erlaubt)

Sie erhalten eine E-Mail mit dem schriftlichen Ergebnis und Information zur Anmeldung zur mündlichen Prüfung.

Bsp.	Max.	Punkte
1	5	
2	5	
3	5	
4	5	
$\sum$	20	

1. Sei $\{W(t) : t \geq 0\}$ eine Brownsche Bewegung, und $\{\mathcal{F}(t) : t \geq 0\}$ die von ihr erzeugte Filtration.

   (a) Wir betrachten die stochastischen Integrale

   $$X(t) = \int_0^t I_{[1,3)}(s) dW(s), \quad Y(t) = \int_0^t e^{-s} dW(s).$$

   Berechnen Sie $E[X(t)]$, $E[Y(t)^2]$ und $E[X(t)Y(t)]$ für $t \geq 0$ möglichst explizit.

   (b) Sei $f(s) = sW(s)$ für $s \geq 0$. Untersuchen Sie, ob

   $$\int_0^\pi f(s) dW(s), \quad \int_0^\infty f(s) dW(s),$$

   (im Sinne unserer Vorlesung) definiert werden können, also ob der Integrand f in M_π^2 und M^2 liegt.[1]

   (c) Berechnen Sie $E[W(1)W(3)^2|\mathcal{F}(2)]$ und $E[W(1)W(2)W(3)]$.

2. Gegeben ist eine Zahl $p \in (0,1)$ und eine iid Folge $(\eta_k)_{k\geq 1}$ mit

   $$P[\eta_1 = 2] = p, \quad P\left[\eta_1 = \frac{1}{2}\right] = 1 - p.$$

   Weiters sei

   $$\xi_n = \prod_{k=1}^n \eta_k, \quad n \geq 1,$$

   und

   $$\xi_n^* = \max_{k=1,\ldots,n} \xi_k, \quad n \geq 1.$$

   (a) Für welche Werte von p ist $(\xi_n)_{n\geq 1}$ ein Martingal, ein Submartingal, ein Supermartingal, überhaupt kein Smartingal? (Begründung).

   (b) Für welche Werte von p ist $(\xi_n^*)_{n\geq 1}$ ein Martingal, ein Submartingal, ein Supermartingal, überhaupt kein Smartingal? (Begründung).

   (c) Für den Rest der Aufgabe sei nun $p = 1/3$. Schätzen Sie $P[\xi_3^* > 3/2]$ mit einer geeigneten Maximalungleichung von Doob ab.

   (d) Berechnen Sie $P[\xi_3^* > 3/2]$ exakt.

   (e) Schätzen Sie $E[(\xi_3^*)^2]$ mit der Doobschen Maximalungleichung für L^2 ab und vergleichen Sie mit dem exakten Wert.

   Hinweis: Zur Lösung von (c)–(e) ist es hilfreich die Vertelungen von ξ_3 und ξ_3^* in einem Baum bzw. tabellarisch zu ermitteln: Welche Werte werden mit welche Wahrscheinlichkeit angenommen.

3. (ϵ_t) sei weißes Rauschen mit Varianz $\mathbf{E}\epsilon_t^2 = 1$. Betrachten Sie folgende Differenzengleichungen:

   (a) $y_t = -y_{t-1}$

   (b) $y_t = -y_{t-1} + \epsilon_t$

   (c) $y_t = -y_{t-1} + \epsilon_t + \epsilon_{t-1}$

   (d) $y_t = 0.75 y_{t-4}$

   (e) $y_t = 0.75 y_{t-4} + \epsilon_t$

   Existiert eine stationäre Lösung (y_t) und wenn ja, ist diese eindeutig?

4. (y_t), (z_t) seien zwei unkorrelierte (schwach) stationäre Prozesse mit:

   $$\mathbf{E}y_t = 0; \; \mathbf{E}z_t = 0; \; \mathbf{E}y_t z_s = 0 \,\forall t, s; \; \mathbf{E}y_{t+k}y_t = \gamma_y(k); \; \mathbf{E}z_{t+k}z_t = \gamma_z(k)$$

   Weiters sei $x_t = \alpha y_{t-1} + \beta z_{t+1}$ wobei α, β zwei beliebige (feste) reelle Zahlen sind.

   (a) Zeigen Sie, dass (x_t) ein (schwach) stationärer Prozess ist.

   (b) Berechnen Sie die Autokovarianzfunktion $\gamma_x(k) = \mathbf{E}x_{t+k}x_t$. (Drücken Sie γ_x durch γ_y und γ_z aus.)

   (c) Nehmen Sie nun an, dass (y_t) ein MA(q_y) und (z_t) ein MA(q_z) Prozess ist. Zeigen Sie, dass (x_t) auch ein MA Prozess ist. Welche Ordnung hat (x_t)?

...

[1] Hier ist $\pi = 3.14159\ldots$ launigerweise die Ludolphsche Zahl.