Name:

Mat.Nr.:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

105.593 Einführung in Stochastische Prozesse und Zeitreihenanalyse
Vorlesung, 2012S, 2.0h
26.Juni 2013
Hubalek/Scherrer

(Dauer 90 Minuten, Unterlagen: ein handbeschriebener A4-Zettel sowie ein nichtprogrammierer Taschenrechner sind erlaubt)

Sie erhalten eine E-Mail mit dem schriftlichen Ergebnis und Information zur Anmeldung zur mündlichen Prüfung.

Bsp.	Max.	Punkte
1	5	
2	5	
3	5	
4	5	
$\sum$	20	

1. Es sei $(\epsilon_t) \sim \mathrm{WN}(\sigma^2)$ ein weißes Rauschen mit Varianz $\mathbf{E}\epsilon_t^2 = \sigma^2$. Weiters sind zwei lineare Filter $a(B) = 1 + a_1 B$ und $b(B) = 1 + b_1 B$ gegeben. (B ist der Lag-Operator und a_1 und b_1 sind zwei reelle Zahlen.) Wir betrachten nun den Prozess (x_t), der definiert ist durch:
$$(x_t) = a(B)b(B)(\epsilon_t)$$
   (a) Zeigen Sie, dass (x_t) ein MA(q) Prozess mit $q \leq 2$ ist. Geben Sie dazu eine Darstellung der Form
$$x_t = c_0\epsilon_t + c_1\epsilon_{t-1} + c_2\epsilon_{t-2}$$
   mit geeigneten Koeffizienten c_0, c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$.

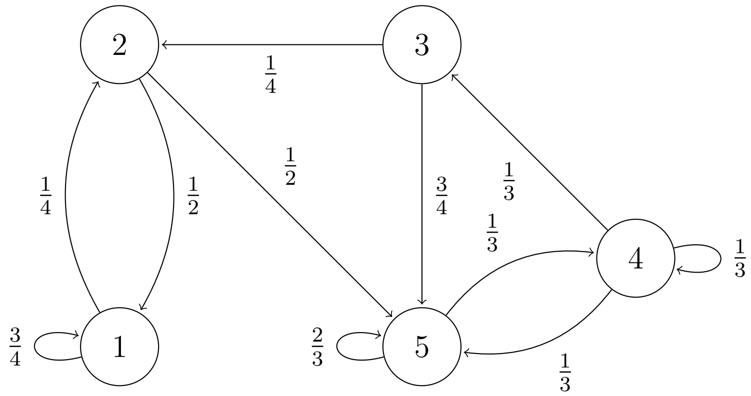
   (b) Berechnen Sie Erwartungswert und Autokovarianzfunktion des Prozesses (x_t).

   (c) Zeigen Sie, dass der Prozess (x_t) dann und nur dann ein weißes Rauschen ist, wenn $a_1 = b_1 = 0$ gilt.

   (d) Wann erfüllt die obige MA(q) Darstellung die (strikte) Minimum-Phase Bedingung?

2. (a) Gegeben sei eine Markovkette mit Zustandsraum $I = \{1, \dots, 5\}$, Anfangsverteilung λ und Übergangsmatrix P, wobei
$$\lambda = (\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, 0, 0), \quad P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$
   Berechnen sie die Trefferwahrscheinlichkeiten h_i^A für $A = \{1, 5\}$ und $i = 1, \dots, 5$.

   (b) Betrachten Sie eine Markovkette, deren Übergangsmatrix P durch die folgenden Graphen spezifiziert ist.



   Schreiben Sie die Matrix P an und formulieren Sie ein Gleichungssystem für die erwarteten Trefferzeiten k_i^A für $A = \{4\}$ und $i = 1, \dots, 5$. (System bitte nicht lösen!)

   (c) Bestimmen Sie die Kommunikationsklassen der Ketten aus (a) und (b). (Hier keine ausführliche Begründung!)

   (d) Ist die Kette aus (a) irreduzibel? Aus (b)?

   (e) Ist der Zustand $i = 5$ in (b) rekurrent oder transient? (Begründung).

3. Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und eine Brownsche Bewegung $(W(t), t \geq 0)$. Weiters sei $(\mathcal{F}(t), t \geq 0)$ die natürliche Filtration von W.

   (a) Sei
   $$f(t) = W(1)I_{[1,2)}(t) + W(2)I_{[3,4)}(t), \quad t \geq 0.$$
   Begründen Sie sorgfältig und detailliert, dass $f \in M^2_{\text{step}}$.

   (b) Geben Sie einen möglichst einfachen und expliziten Ausdruck für das stochastische Integral $\int_0^t f(s)dW(s)$ an, wenn $3 < t < 4$ ist.

   (c) Berechnen Sie $\text{Var}[\int_0^\infty f(s)dW(s)]$!

   (d) Sei
   $$\xi(t) = 1 + t^2 + \int_0^t f(s)dW(s), \quad t \geq 0.$$
   Ist ξ ein Ito-Prozess? (Begründung!)

   (e) Berechnen Sie $E[\xi(t) \mid \mathcal{F}(s)]$, wobei $1 < s < 2$ und $3 < t < 4$ sein soll.

4. Betrachten Sie den MA(1) Prozess
   $$x_t = \epsilon_t - \epsilon_{t-1},$$
   wobei $(\epsilon_t) \sim \text{WN}(\sigma^2 = 1)$ ein weißes Rauschen mit Varianz $\mathbf{E}\epsilon_t^2 = \sigma^2 = 1$ ist.

   (a) Beweisen Sie folgende Formeln für die ein-Schrittprognose $\hat{x}_{t+1,k}$ aus k vergangenen Werten und den entsprechenden Prognosefehler $\hat{u}_{t+1,k} = x_{t+1} - \hat{x}_{t+1,k}$:
   $$\hat{x}_{t+1,k} = \frac{-1}{k+1}(kx_t + (k-1)x_{t-1} + \cdots + 2x_{t+2-k} + 1x_{t+1-k})$$
   $$\hat{u}_{t+1,k} = \frac{1}{k+1}((k+1)\epsilon_{t+1} - \epsilon_t - \epsilon_{t-1} - \cdots - \epsilon_{t+1-k} - \epsilon_{t-k})$$

   (b) Zeigen Sie, dass die Varianz des Prognosefehlers gegeben ist durch:
   $$\mathbf{E}(\hat{u}^2_{t+1,k}) = \sigma^2_{1,k} = 1 + \frac{1}{k+1} = \frac{k+2}{k+1}$$

   (c) Zeigen Sie, dass der ein-Schritt-Prognosefehler für $k \to \infty$ gegen ϵ_{t+1} konvergiert, d.h
   $$\underset{k\to\infty}{\text{l.i.m.}}\, \hat{u}_{t+1,k} = \epsilon_{t+1}$$