Name:

Mat.Nr.:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

105.593 Einführung in Stochastische Prozesse und Zeitreihenanalyse
Vorlesung, 2013S, 2.0h
November 2013
Hubalek/Scherrer

(Dauer 90 Minuten, Unterlagen: ein handbeschriebener A4-Zettel sowie ein nichtprogrammierer Taschenrechner sind erlaubt)

Sie erhalten eine E-Mail mit dem schriftlichen Ergebnis und Information zur Anmeldung zur mündlichen Prüfung.

Bsp.	Max.	Punkte
1	5	
2	5	
3	5	
4	5	
$\sum$	20	

1. Gegeben sei ein AR(2) Prozess ($x_t = 0.25x_{t-2} + \epsilon_t$) wobei ($\epsilon_t$) ein white noise Prozess mit Varianz $\mathbf{E}\epsilon_t^2 = 1$ ist.

   (a) Überprüfen Sie die Stabilitätsbedingung.

   (b) Berechnen Sie die MA(∞) Darstellung des Prozesses: $x_t = \sum_{j\geq 0} b_j \epsilon_{t-j}$.

   (c) Zeigen Sie, dass die Autokovarianzfunktion von (x_t) gegeben ist durch:

$$\gamma(k) = \begin{cases} 4^{-|k|/2}(16/15) & \text{für } k/2 \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

2. Gegeben ist ein white noise Prozess (ϵ_t) mit Varianz $\mathbf{E}\epsilon_t^2 = \sigma^2 > 0$. Betrachten Sie nun den Prozess $(x_t \,|\, t \in \mathbb{N}_0)$, der definiert ist durch

$$x_0 = 1$$

und

$$x_t = 2x_{t-1} + \epsilon_t \quad \forall t \geq 1$$

(a) Drücken Sie x_t durch x_0 und $\epsilon_t, \epsilon_{t-1}, \ldots, \epsilon_1$ aus.

(b) Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbf{E}x_t$

(c) und die Autokovarianzfunktion $\gamma(x_t, x_s) = \mathbf{Cov}(x_t, x_s)$.

(d) Ist dieser Prozess (x_t) schwach stationär? (Begründen Sie Ihre Antwort.)

(Beachten Sie, dass der Prozess nur auf den natürlichen Zahlen (inklusive Null) definiert ist.)

3. Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und eine Brownsche Bewegung $(W(t), t \geq 0)$. Weiters sei $(\mathcal{F}(t), t \geq 0)$ die natürliche Filtration von W und

$$X(t) = W(t)^2 - t, \quad Y(t) = W(t^2) - t, \quad t \geq 0.$$

(a) Untersuchen Sie, ob $(X(t), t \geq 0)$ ein Martingal bezüglich $(\mathcal{F}(t), t \geq 0)$ ist. Begründen Sie Ihr Ergebnis genau, etwa mit den drei Eigenschaften aus der Definition eines Martingals aus der Vorlesung.

(b) Ebenso für $(Y(t), t \geq 0)$.

4. (a) Betrachten Sie eine Markovkette $(X_n)_{n\geq 0}$, mit Zustandsraum $I = \{1, 2, 3, 4\}$, deren Übergangsmatrix P durch untenstehenden Graphen spezifiziert ist. Die Anfangsverteilung λ sei die Gleichverteilung auf I.

   Geben Sie die Kommunikationsklassen der Kette an. Welche Klassen sind abgeschlossen, welche nicht (Begründung) ?

   (b) Geben Sie die Übergangsmatrix P an und berechnen Sie die Trefferwahrscheinlichkeiten für die Menge $A = \{4\}$ unter $\mathbb{P}_i$ für $i = 1, \dots, 4$.

   (c) (Fortsetzung) Berechnen Sie die erwarteten Trefferzeiten für die Menge $A = \{4\}$ unter $\mathbb{P}_i$ für $i = 1, \dots, 4$.

   (d) Sei $Y_n = X_{2n}$ für $n \geq 0$. Dann ist $(Y_n)_{n\geq 0}$ wieder eine Markovkette. (Das müssen und sollen Sie nicht zeigen!) Geben Sie den Zustandsraum, die Anfangsverteilung und die Übergangsmatrix von $(Y_n)_{n\geq 0}$ mit Hilfe von I, λ, P an.

   (e) Sei nun $Z_n = X_{2n+1}$ für $n \geq 0$. Ist $(Z_n)_{n\geq 0}$ eine Markovkette?

   - Ist Ihre Antwort ja, geben Sie den Zustandsraum, die Anfangsverteilung und die Übergangsmatrix von $(Z_n)_{n\geq 0}$ mit Hilfe von I, λ, P an. Den Nachweis, dass $(Z_n)_{n\geq 0}$ tatsächlich eine Markovkette ist, müssen Sie in diesem Fall nicht führen.
   - Ist Ihre Antwort nein, begründen Sie sorgfältig und konkret, warum nicht. Welche Eigenschaft ist nicht erfüllt?