Name:

Mat.Nr.:

~~Bitte keinen Rotstift~~ verwenden!

105.593 Einführung in Stochastische Prozesse und Zeitreihenanalyse
Vorlesung, 2014S, 2.0h
Mai 2014
Hubalek/Scherrer

(Dauer 90 Minuten, Unterlagen: ein handbeschriebener A4-Zettel sowie ein nichtprogrammierer Taschenrechner sind erlaubt)

Sie erhalten eine E-Mail mit dem schriftlichen Ergebnis und Information zur Anmeldung zur mündlichen Prüfung.

Bsp.	Max.	Punkte
1	5	
2	5	
3	5	
4	5	
$\sum$	20	

1. Gegeben ist ein MA(2) Prozess

$$x_t = \epsilon_t + b\epsilon_{t-2}$$

wobei (ϵ_t) eine white noise Prozess mit Varianz $\sigma^2 = 1$ ist und $|b| < 1$.

   (a) Bestimmen Sie die Autokovarianzfunktion des Prozesses (x_t).

   (b) Überprüfen Sie die "strict-miniphase" Bedingung.

   (c) Berechnen Sie die h-Schritt-Prognose $\hat{x}_{t+h}$ aus *einem* vergangenem Wert ($\hat{x}_{t+h} = c_1^{(h)} x_t$, $k = 1$) und die entsprechende Prognosefehlervarianz $\sigma^2_{h,1}$ für $h = 1$, $h = 2$ und $h = 3$.

   (d) Vergleichen Sie $\sigma^2_{h,1}$ auch mit der Varianz des h-Schritt-Prognosefehlers aus der unendlichen Vergangenheit. (D.h. berechnen Sie σ^2_h für $h = 1, 2, 3$.)

2. Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und eine Brownsche Bewegung $(W(t), t \geq 0)$. Weiters sei $(\mathcal{F}(t), t \geq 0)$ die natürliche Filtration von W.

   (a) Gegeben seien zwei reelle Zahlen $0 < \alpha < \beta$ und

   $$f(t) = 1_{[\alpha,\beta)}(t), \quad t \geq 0$$

   Berechnen Sie das stochastische Integral

   $$I_t(f) = \int_0^t f(s)dW(s), \quad t \geq 0.$$

   Gemeint ist: Geben Sie einen möglichst einfachen Ausdruck für $I_t(f)$ an. Unterscheiden Sie eventuell die Fälle $0 \leq t \leq \alpha$, $\alpha < t \leq \beta$ und $t > \beta$.

   (b) Berechnen Sie

   $$\int_0^t f(s)^2 ds$$

   für alle $t \geq 0$.

   (c) Berechnen Sie $\mathrm{Var}[I_t(f)]$ mit der Ito-Isometrie.

   (d) Berechnen Sie $E[I_t(f)|\mathcal{F}(s)]$ für den Fall, dass $\alpha < s < t < \beta$ gilt.

   (e) Sei[1]

   $$\xi(t) = \frac{1}{2} + W(t \vee \gamma) - W(\gamma), \quad t \geq 0$$

   Zeigen Sie, dass $(\xi(t), t \geq 0)$ ein Ito-Prozess ist, indem Sie explizit eine Darstellung

   $$\xi(t) = \xi(0) + \int_0^t a(s)ds + \int_0^t b(s)dW(s) \quad a.s.$$

   für alle $t > 0$ angeben, und zeigen Sie, dass die Zufallsvariable $\xi(0)$ und die Prozesse $(a(t), t \geq 0)$ und $(b(t), t \geq 0)$ die erforderlichen Eigenschaften haben.

[1] Hier sei $\gamma = 0.57721\ldots$ die Euler-Mascheroni-Konstante, was aber nicht wirklich wichtig für die Aufgabe ist, und weiters $x \vee y = \max(x, y)$.

3. Betrachten Sie den ARMA(1,1) Prozess

$$x_t = 0.5x_{t-1} + \epsilon_t + 0.5\epsilon_{t-1}$$

wobei $(\epsilon_t) \sim \mathrm{WN}(\sigma^2)$, $\sigma^2 > 0$.

(a) Überprüfen Sie die Stabilitätsbedingung und die "strict miniphase" Bedingung.

(b) Sind die beiden Polynome $a(z)$ und $b(z)$ koprim?

(c) Zeigen Sie, dass die ein-Schrittprognose $\hat{x}_{t+1}$ aus der unendlichen Vergangenheit gegeben ist durch:

$$\hat{x}_{t+1} = 0.5x_t + 0.5\epsilon_t$$

Berechnen Sie auch die Varianz $\sigma_1^2 = \mathbf{E}\hat{u}_{t+1}^2$ des entsprechenden Prognosefehlers $\hat{u}_{t+1} = x_{t+1} - \hat{x}_{t+1}$.

(d) Zeigen Sie, dass die zwei-Schrittprognose $\hat{x}_{t+2}$ aus der unendlichen Vergangenheit gegeben ist durch:

$$\hat{x}_{t+2} = 0.5\hat{x}_{t+1}$$

Drücken Sie den entsprechenden Prognosefehler $\hat{u}_{t+2} = x_{t+2} - \hat{x}_{t+2}$ durch $\epsilon_{t+2}, \epsilon_{t+1}, \epsilon_t, ..$ aus und berechnen Sie dessen Varianz $\sigma_2^2 = \mathbf{E}\hat{u}_{t+2}^2$.

(e) Beweisen Sie folgende Rekursionsformel für die h-Schrittprognose:

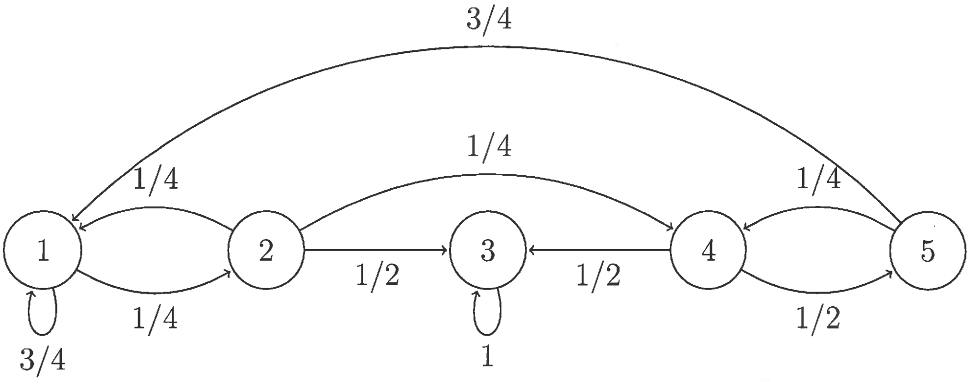
$$\hat{x}_{t+h} = 0.5\hat{x}_{t+h-1} \quad \text{für } h \geq 2$$

Hinweis: Verwenden Sie

$$\mathbb{H}_x(t) = \overline{\mathrm{span}}(x_s \mid s \leq t) = \overline{\mathrm{span}}(\epsilon_s \mid s \leq t) = \mathbb{H}_\epsilon(t)$$

und argumentieren Sie mit dem Projektionssatz!

4. Gegeben Sei eine Markovkette $(X_n)_{n\geq 0}$ mit Zustandsraum $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, Anfangsverteilung δ_1, und Übergangswahrscheinlichkeiten die in folgendem Graphen dargestellt sind.



(a) Bestimmen Sie die Kommunikationsklassen der Kette.

(b) Welche Klassen sind abgeschlossen?

(c) Welche Zustände sind absorbierend?

(d) Sei $T = \inf\{n \geq 0 : X_n = 5\}$. Berechnen Sie $\mathbb{P}_i[T < \infty]$ für $i \in I$.

(e) Ermitteln Sie $\mathbb{E}[T]$. Hinweis: Sie können wahlweise rechnen oder argumentieren!