Name:

Mat.Nr.:

Bitte keinen Rotstift oder Bleistift verwenden!

105.593 Einführung in Stochastische Prozesse und Zeitreihenanalyse
Vorlesung, 2014S, 2.0h
Juni 2014
Hubalek/Scherrer

(Dauer 90 Minuten, Unterlagen: ein handbeschriebener A4-Zettel sowie ein nichtprogrammierer Taschenrechner sind erlaubt)

Sie erhalten eine E-Mail mit dem schriftlichen Ergebnis und Information zur Anmeldung zur mündlichen Prüfung.

Bsp.	Max.	Punkte
1	5	
2	5	
3	5	
4	5	
$\sum$	20	

1. Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und eine Brownsche Bewegung $(W(t), t \geq 0)$. Weiters sei $(\mathcal{F}(t), t \geq 0)$ die natürliche Filtration von W. Wir definieren einen neuen Prozess $(Z(t), t \geq 0)$ durch

$$Z(t) = \begin{cases} W(1) - W(1-t) & 0 \leq t \leq 1 \\ W(t) & t > 1. \end{cases}$$

   (a) Angenommen es ist $0 < t < 1$. Berechnen Sie $E[Z(t)|\mathcal{F}(s)]$ für $0 < s < 1-t$ und für $1 - t < s < 1$.

   (b) Berechen Sie $\mathrm{Cov}[Z(s), Z(t)]$ wenn $0 < s < 1 < t$ gilt.

   (c) Ist Z ein Gaußscher Prozess? (Eine kurze Begründung reicht.)

   (d) Ist $(Z(t), t \geq 0$ adaptiert zu $(\mathcal{F}(t), t \geq 0)$? Geben Sie eine sorgfältigte Begründung für Ihre Antwort.

   (e) Es sei $f(t) = tW(t), t \geq 0$. Berechnen Sie $\mathrm{Var}[\int_0^t f(s)dW(s)]$ für $t > 0$ mit der Ito-Isometrie.

2. In dieser Aufgabe ist folgender Prozess gegeben:

$$x_t = x_{t-1} + u_t, \quad \text{für } t = 1, 2, \ldots \quad \text{mit } x_0 = 0$$

   Der Prozess $(u_t = \epsilon_t + b\epsilon_{t-1})$ ist ein MA(1) Prozess, d.h. $(\epsilon_t) \sim \mathrm{WN}(\sigma^2)$ ist ein white noise Prozess.

   (a) Drücken Sie x_t durch eine geeignete Linear-Kombination von $\epsilon_0, \ldots, \epsilon_t$ aus.

   (b) Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbf{E}x_t$ und die Autokovarianzfunktion $\mathbf{Cov}(x_t, x_s)$ für $t, s \geq 0$.

   (c) Zeigen Sie, dass man $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_t$ durch eine lineare Funktion von $x_1, \ldots, x_t$ und ϵ_0 berechnen kann.

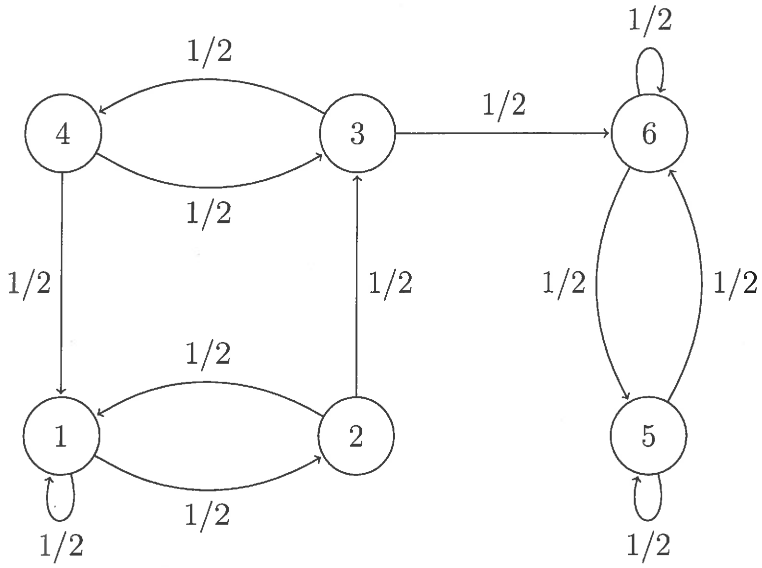
   (d) Zeigen Sie, dass $\hat{x}_{t+1} = x_t + b\epsilon_t$ die optimale 1-Schritt Prognose für x_{t+1} ist, wenn man $x_1, \ldots, x_t$ und ϵ_0 kennt. (Daher ist $\hat{u}_{t+1} = \epsilon_{t+1}$ der entsprechende Prognosefehler). Hinweis: Argumentieren Sie mit dem Projektionssatz.

   (e) Zeigen Sie, dass man diese 1-Schritt Prognose auch rekursiv berechnen kann

$$\hat{x}_{t+1} = (1+b)x_t - b\hat{x}_t$$

   mit Startwert $\hat{x}_1 = b\epsilon_0$. (Hier bezeichnet $\hat{x}_t$ die Prognose für x_t aus den Werten $x_1, \ldots, x_{t-1}$ und ϵ_0.)

3. Gegeben sei eine Markovkette $(X_n)_{n\geq 0}$ mit Zustandsraum $S = \{1, \ldots, 6\}$. Die Anfangsverteilung wird durch $\mathbb{P}[X_0 = 1] = 2/3$ und $\mathbb{P}[X_0 = 6] = 1/3$ beschrieben und die Übergangsmatrix P, wird durch folgendes Diagramm dargestellt.



(a) Bestimmen Sie $\mathbb{P}[X_2 = 3]$ und $\mathbb{P}[X_2 = 3, X_4 = 6]$.

(b) Bestimmen Sie die Kommunikationsklassen und untersuchen Sie, ob sie abgeschlossen sind.

(c) Berechnen Sie die Trefferwahrscheinlichkeiten für $\{1\}$, also $\mathbb{P}_i[H < \infty]$ für $i \in I$, wobei $H = \inf\{n \geq 0 : X_n = 1\}$.

(d) Bestimmen Sie die Rückkehrwahrscheinlichkeit für 1, also $\mathbb{P}_1[T < \infty]$, wobei $T = \inf\{n \geq 1 : X_n = 1\}$. Hinweis: Nützen Sie (bei Bedarf) die Markov-Eigenschaft und Aufgabe (3c).

(e) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Markovkette, wenn Sie im Zustand 1 gestartet wird, diesen Zustand genau dreimal besucht, also $\mathbb{P}_1[V_1 = 3]$, wobei

$$V_1 = \sum_{n\geq 0} I_{\{X_n=1\}}.$$

4. Betrachten Sie den AR(2) Prozess

$$x_t = \frac{1}{2}x_{t-1} + \frac{1}{4}x_{t-2} + \epsilon_t$$

wobei $(\epsilon_t) \sim \mathrm{WN}(\sigma^2)$ ein white noise Prozess mit Varianz $\sigma^2 = 25$ ist.

(a) Überprüfen Sie die Stabilitätsbedingung.

(b) Berechnen Sie die 2-Schritt Prognose $\hat{x}_{t+2}$ und den entsprechenden Prognosefehler $\hat{u}_{t+2} = x_{t+2} - \hat{x}_{t+2}$.

(c) Berechnen Sie die Autokovarianzfunktion der 2-Schritt Prognosefehler $\hat{u}_{t+2}$. (Hinweis: Drücken Sie zunächst $\hat{u}_{t+2}$ durch eine Linearkombination von ϵ_{t+2} und ϵ_{t+1} aus.)

(d) Berechnen Sie die Autokovarianzfunktion $\gamma(k)$ des Prozesses bis zum lag 4 (d.h. es sind $\gamma(0)$, $\gamma(1)$, $\gamma(2)$, $\gamma(3)$ und $\gamma(4)$ zu berechnen).