Name:

Mat.Nr.:

Bitte keinen Rotstift oder Bleistift verwenden!

105.593 Einführung in Stochastische Prozesse und Zeitreihenanalyse
Vorlesung, 2013S, 2.0h
30.September 2014
Hubalek/Scherrer

(Dauer 90 Minuten, Unterlagen: ein handbeschriebener A4-Zettel sowie ein nichtprogrammierer Taschenrechner sind erlaubt)

Sie erhalten eine E-Mail mit dem schriftlichen Ergebnis und Information zur Anmeldung zur mündlichen Prüfung.

Bsp.	Max.	Punkte
1	5	
2	5	
3	5	
4	5	
$\sum$	20	

1. Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und eine Brownsche Bewegung $(W(t), t \geq 0)$. Weiters sei $(\mathcal{F}(t), t \geq 0)$ die natürliche Filtration von W.

   (a) Geben Sie $\mathbb{E}[W(t)]$, $\mathbb{E}[W(s)]$, $\mathbb{E}[W(t)W(s)]$, und $\mathbb{E}[W(s)^2]$ für $0 \leq s \leq t$ an.

   (b) Wir fixieren nun drei Zeitpunkte $0 \leq r \leq s \leq t$ und definieren die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

   $$f(c_0, c_1) = \mathbb{E}[(W(t) - c_0 W(r) - c_1 W(s))^2], \quad c_0, c_1 \in \mathbb{R}.$$

   Finden Sie c_0, c_1 sodass $f(c_0, c_1)$ minimal wird. (Begründung!)

   (c) Sei c_0^*, c_1^* die Lösung aus der vorherigen Teilaufgabe. Geben Sie $f(c_0^*, c_1^*)$ an.

   (d) Berechnen Sie $\mathbb{E}[W(r)W(s)W(t)|\mathcal{F}(s)]$ für $0 < r < s < t$.

   (e) Der Prozess

   $$\xi(t) = \int_0^t W(s)ds + \int_0^t W(s)^2 dW(s), \quad t \geq 0$$

   ist ein Ito-Prozess.[1] Untersuchen Sie ob der Prozess

   $$\eta(t) = e^{-\pi \xi(t)}, \quad t \geq 0$$

   auch ein Ito-Prozess ist, wobei $\pi = 3.1415926535\ldots$ sein soll. Ist Ihre Antwort *ja*, geben Sie eine Darstellung der Form

   $$\eta(t) = \eta(0) + \int_0^t a(s)ds + \int_0^t b(s)dW(s), \quad t \geq 0$$

   an, ist Ihre Antwort *nein*, geben Sie eine Begrüundung, warum das so ist.

2. Gegeben ist die Autokovarianzfunktion

   $$\gamma(k) = \begin{cases} \frac{9}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{|k/2|} & \text{für } k/2 \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

   eines AR(2) Prozesses $x_t = a_1 x_{t-1} + a_2 x_{t-2} + \epsilon_t$, $(\epsilon_t) \sim \text{WN}(\sigma^2)$.

   (a) Berechnen Sie die Parameter a_1, a_2, σ^2 des AR Prozesses.

   (b) Berechnen Sie die (optimale) 1-Schrittprognose $\hat{x}_{t+1}$ und die entsprechende Varianz des Prognosefehlers $\hat{u}_{t+1} = x_{t+1} - \hat{x}_{t+1}$.

   (c) Berechnen Sie die (optimale) 2-Schritt Prognose $\hat{x}_{t+2}$ und die entsprechende Varianz des Prognosefehlers $\hat{u}_{t+2} = x_{t+2} - \hat{x}_{t+2}$.

[1] Das sollen Sie als gegeben voraussetzen.

3. Gegeben Sei eine Markovkette $(X_n)_{n\geq 0}$ mit Zustandsraum $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, Anfangsverteilung δ_3, und Übergangmatrix

$$P = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}.$$

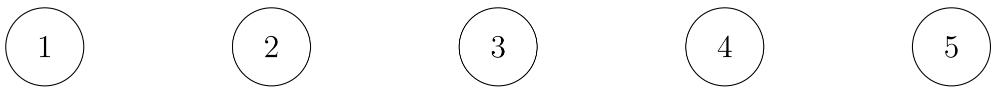
(a) Skizzieren Sie die Kette mit Hilfe der unstenstehenden Grafik.

(b) Bestimmen Sie die Kommunikationsklassen der Kette.

(c) Ist die Kette irreduzibel? (Begründung)

(d) Sei $T = \inf\{n \geq 0 : X_n \in \{1, 5\}\}$. Berechnen Sie $\mathbb{E}_i[T < \infty]$ für $i \in I$.

(e) Welche Zustände sind rekurrent, welche transient? (Begründung)



4. Gegeben ist ein schwach stationärer Prozess (x_t) mit $\mathbf{E}x_t = \mu_x$ und Autokovarianzfunktion $\gamma_x(k) = \mathbf{Cov}(x_{t+k}, x_t)$. Weiters ist eine (quadratisch integrierbare) Zufallsvariable y mit $\mathbf{E}y = \mu_y$ und $\mathbf{Var}(y) = \sigma_y^2$ gegeben. Betrachten Sie nun den Prozess $(z_t = y + ax_t)$ für ein $a \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass (z_t) ein schwach stationärer Prozess ist, wenn die Kovarianz $\mathbf{Cov}(x_t, y)$ unabhängig von t ist. (D.h. es gilt $\mathbf{Cov}(x_t, y) = \mathbf{Cov}(x_0, y)$ für alle $t \in \mathbb{Z}$.)

(b) Berechnen Sie für diesen Fall den Erwartungswert $\mathbf{E}z_t$ und die Autokovarianzfunktion $\gamma_z(k) = \mathbf{Cov}(z_{t+k}, z_t)$.

(c) Betrachten Sie nun den Fall $y = x_0 + x_1$. Ist der Prozess $(z_t = y + ax_t)$ stationär? Hinweis: Die Antwort hängt vom Parameter $a \in \mathbb{R}$ und dem Prozess (x_t) ab!