Name:

Mat.Nr.:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

Finanzmathematik 1: diskrete Modelle
(Vorlesungsprüfung)
21. Juni 2013

Dauer: 90 Minuten

Bei der schriftlichen Prüfung darf ein von Hand (beidseitig) beschriebener A4-Zettel benutzt werden.

Anmeldung zur mündlichen Prüfung im Sekretariat,
Sandra Trenovatz (sandra@fam.tuwien.ac.at).

Bsp.	Max.	Punkte
1	25	
2	35	
3	40	
$\sum$	100	

Schriftlich:

AssistentIn:

Mündlich:

Gesamtnote:

1. **Ein-Perioden-Modell**
Betrachten Sie die folgenden 3 Marktmodelle.
(A) $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, $r = \frac{1}{2}$ und

$$S_0 = 5, \quad S_1(\omega_1) = \frac{5}{2}, \quad S_1(\omega_2) = \frac{13}{2}.$$

(B) $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, $r = \frac{1}{3}$ und

$$S_0 = 4, \quad S_1(\omega_1) = \frac{28}{3}, \quad S_1(\omega_2) = 8, \quad S_1(\omega_3) = 4.$$

(C) $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, $r = \frac{1}{4}$ und

$$S_0 = \begin{pmatrix} 12 \\ 2,4 \end{pmatrix}, \quad S_1(\omega_1) = \begin{pmatrix} 25 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad S_1(\omega_2) = \begin{pmatrix} 14 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad S_1(\omega_3) = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Jedes Modell sei mit einem Wahrscheinlichkeitsmaß versehen, das jedem Szenario eine strikt positive Wahrscheinlichkeit zuordnet.
1) Geben Sie zunächst die Definition eines äquivalenten Martingalmaßes und einer Arbitragemöglichkeit an. Beschreiben Sie für die Modelle die Menge der äquivalenten Martingalmaße. Geben Sie eine Arbitragemöglichkeit an, falls eine solche existiert. 15 Pkt
2) Bestimmen Sie für die arbitragefreien Modelle alle arbitragefreien Preise der Put-Optionen mit Strike $K = 15$ bzgl. der riskanten Finanzgüter S_1^1. 10 Pkt

2. **Zwei-Perioden-Modell**
Betrachten Sie das folgende Zweiperiodenmodell mit einem risikolosen und einem riskanten Finanzgut B und S. Desweiteren sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_1 = \sigma(S_1)$, $\mathcal{F}_2 = \sigma(S_1, S_2) = \mathcal{P}(\Omega)$ und $P(\omega_i) > 0$ für $i \in \{1, ..., 4\}$.

$$
\begin{tikzcd}
B_0 = 1 \arrow[r] & B_1 = \frac{3}{2} \arrow[r] & B_2 = \frac{8}{5} \\
 & & S_2(\omega_1) = 224 \\
 & S_1(\omega_{1,2}) = 180 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
S_0 = 100 \arrow[ur] \arrow[dr] & & S_2(\omega_{2,3}) = 176 \\
 & S_1(\omega_{3,4}) = 120 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & S_2(\omega_4) = 80
\end{tikzcd}
$$

1) Bestimmen Sie das äquivalente Martingalmaß. 5 Pkt
2) Geben Sie zunächst die Definition der Snell'schen Einhüllenden an. Berechnen Sie anschließend die Snell-Einhüllende des Claims $C_0 = 0$, $C_1(\omega_{1,2}) = 195$, $C_1(\omega_{3,4}) = 135$, $C_2(\omega_1) = 208$, $C_2(\omega_2) = C_2(\omega_3) = 144$ und $C_2(\omega_4) = 112$. 20 Pkt
3) Berechnen Sie die minimale optimale Stoppzeit τ_{min}. 10 Pkt

3. **Black-Scholes-Modell**
Betrachten Sie auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Black-Scholes-Modell mit Bankkonto $B = (B_t)_{t\in[0,T]}$, $B_t = e^{rt}$ und Aktienpreisprozess $S = (S_t)_{t\in[0,T]}$. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$ ist der diskontierte Preisprozess durch

$$X_t = S_0 \exp\left[\sigma W_t + (\alpha - r)t\right] = S_0 \exp\left[\sigma W_t^* - \sigma^2 \frac{t}{2}\right]$$

gegeben, wobei $W_t^* = W_t + \lambda t$ für $\lambda = (\alpha + 0.5\sigma^2 - r)/\sigma$. $(W_t^*)_{0\le t\le T}$ ist dann eine Brownsche Bewegung bzgl. der von $(W_t)_{0\le t\le T}$ erzeugten Filtration und dem Maß $Q^* \sim P$, wobei

$$\frac{dQ^*}{dP} = \exp\left[-\lambda W_T - \lambda^2 \frac{T}{2}\right].$$

Desweiteren bezeichne Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung, φ ihre Dichte und

$$d_{+,-} = d_{+,-}(s,t,K) = \frac{\ln(\frac{s}{K}) + (r \pm \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}.$$

1) Zeigen Sie, dass der Prozess $(X_t)_{0\le t\le T}$ ein Martingal bzgl. der von $(W_t)_{0\le t\le T}$ erzeugten Filtration und des äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaßes $Q^* \sim P$ ist. 10 Pkt
Zusatzinformation: Das äquivalente Martingalmaß ist sogar eindeutig.
Hinweis: Die Momenterzeugende Funktion einer normalverteilten Zufallsvariablen $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ist gegeben durch

$$M_X(t) = \exp\left[\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right].$$

2) Zeigen Sie, dass der faire Preis der Cash-or-Nothing Option $C := c1_{\{S_T > K\}}$ mit Strike $K > 0$ und $c > 0$ gegeben ist durch 15 Pkt

$$ce^{-rT}\Phi(d_-(S_0, T, K)).$$

3) Eine Gap-Option ist durch $C = (S_T - c)1_{\{S_T > K\}}$ gegeben. Zeigen Sie, dass der faire Preis dieser Option gegeben ist durch 15 Pkt

$$S_0\Phi(d_+(S_0,T,K)) - e^{-rT}c\Phi(d_-(S_0,T,K)).$$

Hinweis: Der Preis einer europäischen Call-Option mit Strike $K > 0$ und Maturität T ist gegeben durch

$$S_0\Phi(d_+(S_0,T,K)) - e^{-rT}K\Phi(d_-(S_0,T,K)).$$