Name:

Mat.Nr.:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

105.057 Finanzmathematik
(Vorlesung, 2007S, 4.0h)
7. Mai 2008
Schachermayer

(Dauer 90 Minuten, alle Unterlagen sind erlaubt)

Anmeldung zur mündlichen Prüfung im Sekretariat, FH 7.Stock,
Sandra Trenovatz, Tel. 01 / 58801 - 10511,
e-mail: `secr@fam.tuwien.ac.at`

1. Es seien $0 < K < L$ zwei Strike-Preise, und $X = (S_T - K)_+$ bzw. $Y = (S_T - L)_+$ seien die Auszahlungen entsprechender Calls auf ein dividendengeschütztes Wertpapier S. Die risikolose Anlage sei $B_t = \mathrm{e}^{rt}$. Zeigen Sie, dass die Preise der beiden Optionen zum Zeitpunkt 0 die Ungleichung (5 Pkt.)

$$\Pi(0; X) - \Pi(0; Y) \leq \mathrm{e}^{-rT}(L - K)$$

erfüllen. Gilt sie auch für amerikanische Calls?

2. Gegeben sei das folgende Marktmodell mit Bond B und Stock S. (5 Pkt.)

$$
\begin{tikzcd}
B_0 = 1 \arrow[r] & B_1 = 3/2 \arrow[r] & B_2 = 2 \\
 & & S_2 = 18 \\
 & S_1 = 9/2 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
S_0 = 1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & S_2 = 9/2 \\
 & S_1 = 9/8 \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & S_2 = 9/8 \\
 & & S_2 = 1/2
\end{tikzcd}
$$

(a) Bestimmen Sie die Menge der äquivalenten Martingalmaße und die Menge der absolut-stetigen Martingalmaße.

(b) Ist der Markt arbitragefrei? Ist er vollständig?

(c) Berechnen Sie die arbitrage-freien Preise zum Zeitpunkt 0 einer Europäischen Put-Option mit Fälligkeit 2 und Strike 9/4.

3. Betrachten Sie ein Bachelier-Modell mit Zinsrate $r = 0$ und Stock S. Unter dem Martingalmaß $\mathbb{Q}$ gilt also (5 Pkt.)

$$S_t = S_0 + \sigma W_t, \qquad 0 \leq t \leq T,$$

wobei S_0, σ positiv sind und W eine Standard-Brownsche Bewegung ist.

Berechnen Sie den arbitragefreien Preis v einer europäischen Option mit Auszahlung

$$(S_T - S_0)^2.$$