31. Jänner 2008
Risiko- und Ruintheorie, F. Hubalek (WS 2007/08)

Dauer 90 Minuten, alle Unterlagen sind erlaubt, bitte alle Zwischenschritte angeben

---

Hinweis: Beachten Sie bei allen Beispielen den Definitionsbereich der vorkommenden Funktionen (z.B. der momentenerzeugenden Funktion)!

1. Ein Gesamtschaden kann als Zufallssumme dargestellt werden, wobei die Zahl der Summanden Poissonverteilt mit Parameter $\lambda_N = 1$ ist und die Einzelschäden ebenfalls Poissonverteilt sind mit Parameter $\lambda_X = \frac{1}{2}$. (6 Pkt.)

   (a) Bestimmen Sie die Prämie für den Gesamtschaden nach dem Erwartungswertprinzip sowie dem Standardabweichungsprinzip jeweils mit 5% Sicherheitszuschlag. (2)

   (b) Bestimmen Sie die Momentenerzeugende Funktion des Gesamtschadens, sowie die Prämie für den Gesamtschaden nach dem Exponentialprinzip mit Risikoaversionsparameter 2. (2)

   (c) Angenommen, zwei Versicherungen benutzen das Exponentialprinzip mit Risikoaversionsparameter $a_1 = 1$ und $a_2 = 2$ und teilen sich den Gesamtschaden. Wie sieht die optimale Aufteilung aus und wie groß sind die entsprechenden Prämien, wenn die Summe der beiden Prämien minimiert werden soll? (2)

Lösung: Poisson-Verteilung: $M(t) = \exp(\lambda(e^t - 1))$, $\mathbb{E}(X) = \operatorname{Var}(X) = \lambda_X = \frac{1}{2}$, $\mathbb{E}(N) = \operatorname{Var}(N) = \lambda_N = 1$

(a)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S) &= \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X) = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\\
\operatorname{Var}(S) &= \mathbb{E}(N)\operatorname{Var}(X) + \operatorname{Var}(N)\mathbb{E}(X)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}\\
P_{EW}(S) &= (1+\lambda)\mathbb{E}(S) = 1.05 \cdot \frac{1}{2} = 0.525\\
P_{Std}(S) &= \mathbb{E}(S) + \beta\sqrt{\operatorname{Var}(S)} = \frac{1}{2} + 0.05\frac{\sqrt{3}}{2} = 0.543301
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
M_S(t) &= M_N(\log M_X(t)) = \exp(M_x(t) - 1) = \exp\left(\exp\left(1/2\left(e^t - 1\right)\right) - 1\right)\\
P_{Exp}(S) &= \frac{1}{a}\log M_S(a) = \frac{1}{2}\left(\exp\left(1/2\left(e^2 - 1\right)\right) - 1\right) = 11.6993 \text{ (!!!!)}
\end{aligned}$$

Dies zeigt, wie stark eine zu vorsichtige Wahl der Parameter die Prämie extrem in die Höhe treiben kann!

(c) Für Optimalität soll (siehe Gerber, S.78, Formel (5.3)) die i-te Versicherung einen Schaden von $\tilde{S}_i = \frac{a}{a_i}S$ versichern mit

$$a = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{3}\,.$$

Versicherung 1 übernimmt $\tilde{S}_1 = \frac{2}{3}S$, Versicherung 2 nur $\tilde{S}_2 = \frac{2/3}{2}S = \frac{1}{3}S$. Dies gilt unabhängig von der speziellen Verteilung von S, die in unserem Beispiel durch die Momentenerzeugende Funktion in 1b gegeben ist. Die minimale Gesamtprämie beträgt dann

$$\tilde{P} = \frac{1}{a}\log M_S(a) = \frac{3}{2}\left(\exp\left(\frac{1}{2}\left(e^{2/3} - 1\right)\right) - 1\right) = 0.90929\,,$$

die Prämien der einzelnen Unternehmen berechnen sich als:

$$\tilde{P}_i = \frac{1}{a_i}\log \mathbb{E}[e^{a_i \tilde{S}_i}] = \frac{1}{a_i}\log \mathbb{E}[e^{aS}] = \frac{1}{a_i}\log M_S(a) = \frac{a}{a_i}\tilde{P}$$

$$\tilde{P}_1 = \frac{2/3}{1}\tilde{P} = 0.606193 \qquad \tilde{P}_2 = \frac{2/3}{2}\tilde{P} = 0.303097$$

2. Betrachten Sie einen Cramer-Lundberg Prozess mit Anfangskapital x, Prämienrate c, Schadensintensität λ und Schäden X, die iid. $\Gamma(\mu, \alpha)$ verteilt sind (mit $\mu, \alpha > 0$). (6 Pkt.)

   (a) Bestimmen Sie den relativen Sicherheitszuschlag! Wenn die Parameter λ, μ und α gegeben sind, wie groß müssen die Prämien gewählt werden, um einen positiven Sicherheitszuschlag zu erhalten? (1)

   Sei nun $\lambda = \frac{1}{4}$, $c = \frac{1}{2}$, sowie $\mu = \frac{15}{8}$ und $\alpha = 2$.

   (b) Wie groß ist der Sicherheitszuschlag? (1)

   (c) Bestimmen Sie den Cramer-Lundberg-Koeffizienten für den Prozess mit obigen Parametern! (2)

   (d) Finden Sie eine (nicht optimale) Schranke $\tilde{x}$ für das Anfangskapital, sodass die Ruinwahrscheinlichkeit für alle $x > \tilde{x}$ höchstens 1% beträgt! (2)

Lösung: $\Gamma(\mu, \alpha)$-Verteilung: $f(x) = \frac{\mu}{\Gamma(\alpha)}(\mu x)^{\alpha-1}e^{-\mu x}$ für $x > 0$, $p_1 = \mathbb{E}(X) = \frac{\alpha}{\mu}$, $\mathrm{Var}(X) = \frac{\alpha}{\mu^2}$, $M_X(t) = \left(\frac{\mu}{\mu-t}\right)^\alpha$ für $t < \mu$.

(a) $\Lambda = \frac{c}{\lambda p_1} - 1 = \frac{c}{\lambda}\frac{\mu}{\alpha} - 1 > 0$, d.h. $\frac{c}{\lambda} > \frac{\alpha}{\mu}$ bzw. $c > \frac{\alpha\lambda}{\mu}$

(b) $\Lambda = \frac{1/2}{1/4}\frac{15/8}{2} - 1 = 2 \cdot \frac{15}{16} - 1 = \frac{15}{8} - 1 = \frac{7}{8}$

(c) Cramer-Lundberg-Gleichung: $\lambda + rc = \lambda\left(\frac{\mu}{\mu-r}\right)^\alpha$
Eingesetzte Werte: $1/4 + r/2 = 1/4\left(\frac{15/8}{15/8-r}\right)^2$, bzw. $(1+2r)(15/8-r)^2 = (15/8)^2$
Nach Auflösung in Polynom in r: $0 = 2r^3 - \frac{13}{2}r^2 + \frac{105}{32}r$
$r_0 = 0$ ist die triviale Lösung, damit bleibt das Polynom $0 = r^2 - \frac{13}{4}r + \frac{105}{64}$ mit der allgemeinen Lösung $r_{1,2} = \frac{13}{4\cdot 2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{13}{4}\right)^2 - \frac{105}{64}} = \frac{13}{8} \pm \sqrt{\frac{169-105}{64}} = \frac{13}{8} \pm 1$. Davon liegt lediglich $r_2 = \frac{13}{8} - 1 = \frac{5}{8}$ im Definitionsbereich $r < \mu = \frac{15}{8}$ von $M_S(t)$ und stellt daher den Cramer-Lundberg-Koeffizienten $\mathbf{r} = \mathbf{\frac{5}{8}}$ dar!

(d) Die Ruinwahrscheinlichkeit $\psi(x)$ ist in x fallend, es genügt daher ein $\tilde{x}$ zu finden, für das $\psi(\tilde{x}) < 0.01$. Dies erfolgt mit der Cramer-Lundberg-Abschätzung $\psi(\tilde{x}) \leq \exp(-r\tilde{x}) = \exp(-5\tilde{x}/8) \overset{!}{=} 0.01$, woraus sich ergibt, dass bei ein Eigenkapital von $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{7.36827}$ oder mehr die Ruinwahrscheinlichkeit maximal 1% beträgt. Da die Cramer-Lundberg-Abschätzung – wie der Name schon sagt – nur eine Abschätzung von $\psi(x)$ nach oben ist, ist diese Schranke für x auch optimal!

Hinweis: Bei anderer Interpretation der Angabe[1] müsste die Lösung folgendermaßen aussehen: $\Gamma(\mu, \alpha)$-Verteilung: $f(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(\mu)}(\alpha x)^{\mu-1}e^{-\alpha x}$ für $x > 0$, $p_1 = \mathbb{E}(X) = \frac{\mu}{\alpha}$, $\mathrm{Var}(X) = \frac{\mu}{\alpha^2}$, $M_X(t) = \left(\frac{\alpha}{\alpha-t}\right)^\mu$ für $t < \alpha$.

[1] Vertauschung der beiden Parameter der Γ-Verteilung: Die Notation der Gamma-Verteilung ist leider nicht einheitlich gehandhabt, manche Autoren notieren die Parameter in anderer Reihenfolge, bei manchen Autoren wird nicht μ, sondern $b = \frac{1}{\mu}$ als Parameter angegeben. Eine eindeutigere Angabe wäre gewesen: ".. Schäden X, die iid. einer Γ-Verteilung mit Erwartungswert α/μ und Varianz α/μ^2 folgen."

(a) $\Lambda = \frac{c}{\lambda p_1} - 1 = \frac{c}{\lambda}\frac{\alpha}{\mu} - 1 > 0$, d.h. $\frac{c}{\lambda} > \frac{\mu}{\alpha}$ bzw. $c > \frac{\mu\lambda}{\alpha}$

(b) $\Lambda = \frac{1/2}{1/4}\frac{2}{15/8} - 1 = 2 \cdot \frac{16}{15} - 1 = \frac{17}{15}$

(c) Cramer-Lundberg-Gleichung: $\lambda + rc = \lambda\left(\frac{\alpha}{\alpha - r}\right)^{\mu}$

Eingesetzte Werte: $1/4 + r/2 = 1/4\left(\frac{2}{2-r}\right)^{15/8}$, was eine nicht mehr analytisch lösbare Gleichung darstellt. Man kann allerdings versuchen, die Lösung numerisch einzugrenzen, indem man die linke und die rechte Seite der C-L-Glg. miteinander vergleicht:

r	li.S.	Unglg.	re.S.
0	0.25	$=$	0.25
0.5	0.5	$>$	0.428746
0.75	0.625	$>$	0.603483
1	0.75	$<$	0.917004

Da beide Seiten stetige Funktionen sind, existiert nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle $0.75 < r < 1$, was unserem gesuchten Koeffizienten entspricht, wobei der Wert auch im Definitionsbereich von M_S liegt! (Der exakte Wert beträgt $r = 0.797108$.)

(d) Die Ruinwahrscheinlichkeit $\psi(x)$ ist in x fallend, es genügt daher ein $\tilde{x}$ zu finden, für das $\psi(\tilde{x}) < 0.01 = \exp(-\log 100)$ gilt. Nach 2c gilt $r > \frac{3}{4}$ und daher $-rx < -\frac{3}{4}x$ bzw. $\exp(-rx) < \exp(-3/4x)$. Durch den Vergleich der Exponenten erhält man die hinreichende Bedingung $-\frac{3}{4}x < -\log 100$ bzw. $x > \frac{4}{3}\log 100 = 6.14023$, woraus $\mathbf{\tilde{x}} = \mathbf{6.14023}$ folgt.

3. Unter Vernachlässigung von Zinseffekten (d.h. $r = 1$) beantworten Sie: (6 Pkt.)

(a) Gegeben sei ein Risiko $X = K - Y$, wobei $Y \sim \mathcal{E}(\lambda)$ exponentialverteilt ist und K eine Konstante darstellt. Bestimmen Sie $VaR_\alpha(X)$ und $ES_\alpha(X)$, sowie $ES_\alpha(-X)$! (3)

(b) Sei $K = 5$ und $\lambda = \frac{1}{2}$. Berechnen Sie $ES_{0.1}(X)$ und $ES_{0.1}(-X)$. (1)

(c) Seien X_1 und X_2 zwei unabhängige Zufallsvariablen der obigen Form $(K - Y_i)$. Ist $Z = X_1 - X_2 - 1$ ein akzeptables Risiko, wenn die Akzeptanzmenge durch den Expected Shortfall zum Niveau $\alpha = 0.1$ bestimmt wird? (2)

Lösung: $X = K - Y$ mit $Y \sim \mathcal{E}(\lambda)$, also $f(y) = \lambda\exp(-\lambda y)$.

(a) Achtung: $Y = K - X$ ist zwar exponentialverteilt, das heißt aber nicht, dass man für F_X einfach $K - y$ in die Verteilungsfunktion der Normalverteilung einsetzen darf! Dabei würde man vom falschen Ende der Verteilung wegrechnen!

$$\begin{aligned}
F_X(m) &= \mathbb{P}(X \leq m) = \mathbb{P}(Y \geq K - m) = 1 - F_Y(K - m) \\
VaR_\alpha(X) &= -\inf\{m \in \mathbb{R} | F_X(m) > \alpha\} = -F_X^{-1}(\alpha) = -\left(\frac{\log\alpha}{\lambda} + K\right) \\
ES_\alpha(X) &= \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha VaR_u(X)du = -\frac{1}{\lambda}(\log\alpha - 1) - K \\
VaR_\alpha(-X) &= -VaR_{1-\alpha}(X) = \left(\frac{\log\alpha}{\lambda} + K\right) \\
ES_\alpha(-X) &= \mathbb{E}[X | X > \underbrace{VaR_\alpha(-X)}_{=-VaR_{1-\alpha}(X)}] = -\mathbb{E}[-X | -X < VaR_{1-\alpha}(X)]
\end{aligned}$$

Der expected Shortfall kann entweder direkt durch Integration aus $VaR_\alpha(-X)$ berechnet werden oder durch Herleitung eines allgemeinen Zusammenhangs von $ES(X)$ und $ES(-X)$.

Der letzte Term in obiger Gleichung lässt sich umschreiben wegen:

$$\mathbb{E}[-X] = \underbrace{\mathbb{E}[-X|-X \geq VaR_{1-\alpha}(X)]}_{=ES_{1-\alpha}(X)} \underbrace{\mathbb{P}(-X \geq VaR_{1-\alpha}(X))}_{=1-\alpha \text{ nach Def. } VaR} +$$
$$\mathbb{E}[-X|-X < VaR_{1-\alpha}(X)] \underbrace{\mathbb{P}(-X < \mathrm{Var}_{1-\alpha}(X))}_{=\alpha}$$

Insgesamt erhalten wir also den allgemeinen Zusammenhang von ES von X und $-X$ als:

$$ES_\alpha(-X) = \frac{1}{\alpha}\left(\mathbb{E}[X] + (1-\alpha)ES_{1-\alpha}(X)\right)$$

Im Speziellen in diesem Beispiel also

$$ES_\alpha(-X) = \frac{1}{\alpha}\left(K - \frac{1}{\lambda} - (1-\alpha)\left(\frac{1}{\lambda}(\log(1-\alpha)-1) + K\right)\right) =$$
$$= \left(K - \frac{1}{\lambda}\right) - \frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{1}{\lambda}\log(1-\alpha)$$

(b)

$$ES_{0.1}(X) = 2\log 10 - 3 = 1.6051$$
$$ES_{0.1}(-X) = 3 - 9 \cdot 2\log\frac{9}{10} = 4.89649$$

(c) Es gilt

$$ES_\alpha(X_1 - X_2 - 1) = 1 + ES_\alpha(X_1 - X_2) \leq 1 + ES_\alpha(X_1) + ES_\alpha(-X_2) = 7.5016$$

Aus dieser Abschätzung ist keine Aussage möglich, ob $ES_\alpha(X_1 - X_2 - 1)$ positiv oder negativ ist!

Andere Argumentationsweise nötig: $X_1 - X_2 = Y_2 - Y_1$ ist völlig symmetrisch um 0, d.h. mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ wird eine negativer Wert (=Schaden) angenommen. Mit derselben Wahrscheinlichkeit nimmt also $X_1 - X_2 - 1$ einen Wert kleiner -1 an. Damit ist auch der VaR für $\alpha < \frac{1}{2}$ mit 1 nach unten beschränkt

$$VaR_\alpha(X_1 - X_2 - 1) > 1 \forall \alpha < \frac{1}{2}$$

und damit natürlich auch $ES_\alpha > 1$ für $\alpha < \frac{1}{2}$. Damit ist $ES_\alpha > 0$ und das Risiko daher nicht akzeptabel.