Name:

Mat.Nr.: Studium:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

Risiko- und Ruintheorie
(Vorlesungsprüfung)
27. November 2008
F. Hubalek (WS 2007/08)

(Dauer 90 Minuten, alle Unterlagen sind erlaubt, bitte alle Zwischenschritte angeben)

Anmeldung zur mündlichen Prüfung im Sekretariat, FH 7.Stock,
Sandra Trenovatz, Tel. 01 / 58801 - 10511,
e-mail: `secr@fam.tuwien.ac.at`

Bsp.	Max.	Punkte
1	6	
2	6	
3	6	
$\sum$	18	

1. Betrachten Sie (ohne Zins!) zwei Risiken X_1 und X_2. (6 Pkt.)

   (a) Sei X_1 exponentialverteilt auf $[-a, \infty)$, dh. $x + a \sim \mathcal{E}(\lambda)$. Bestimmen Sie $VaR_\alpha(X)$ für allgemeines $\alpha \in [0, 1]$. (1)

   (b) Bestimmen Sie $ES_\alpha[X_1]$. (1)

   (c) Seien X_1 und X_2 exponentialverteilt auf $[-5, \infty)$. Bestimmen Sie sowohl $ES_{0.1}[X_1]$ als auch $ES_{0.1}[-X_2]$ in Abhängigkeit von λ. (2)

   (d) Was kann über das Portfolio $Z = 2X_1 - X_2$ ausgesagt werden, wenn die Akzeptanzmenge mittels Expected Shortfall mit Parameter $\alpha = 0.1$ bestimmt wird? Ist es ein akzeptables Risiko? (2)

2. Betrachten Sie einen Cramer-Lundberg Prozess mit Anfangskapital x, Prämienrate c, Schadensintensität λ und Schäden X, die iid. $Erlang(k, \vartheta)$ verteilt sind mit $k \in \mathbb{Z}$ und $\vartheta > 0$. Die Dichte der $Erlang(k, \vartheta)$-Verteilung lautet $f(x) = \frac{x^{k-1} exp(-x/\vartheta)}{\vartheta^k (k-1)!}$, der Erwartungswert ist $\mathbb{E}[x] = \vartheta k$ und die Momenterzeugende Funktion $M_X(t) = (1 - \vartheta t)^{-k}$ für $t < 1/\vartheta$. (6 Pkt.)

   (a) Bestimmen Sie den relativen Sicherheitszuschlag! Wenn die Parameter λ, k und ϑ gegeben sind, wie groß müssen die Prämien gewählt werden, um einen positiven Sicherheitszuschlag zu erhalten? (2)

   Sei nun $k = 1$.

   (b) Bestimmen Sie allgemein den Cramer-Lundberg-Koeffizienten für den Prozess mit obigen Parametern ($k = 1$)! Wie groß ist er für $\lambda = \frac{1}{4}$, $c = \frac{1}{2}$ und $\vartheta = 15/8$? (2)

   (c) Finden Sie eine (nicht unbedingt optimale) Schranke $\tilde{x}$ für das Anfangskapital, sodass die Ruinwahrscheinlichkeit für alle $x > \tilde{x}$ höchstens 1% beträgt! (2)

3. Betrachten Sie Schäden $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ mit $\lambda = 2$. Es stehen für eine Versicherung des Schadens verschiedene Rückversicherungsstrategien zur Auswahl: (6 Pkt.)

   - Versicherung I zahlt den vollen Schaden $X_I = X$, d.h. die Dichte eines Schadens lautet $f_I(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ für $x \in \mathbb{R}$.
   - Versicherung II übernimmt den vollen Schaden, wenn er über einer Bagatellgrenze K_1 liegt ($X_{II} = \mathbb{1}_{X > K_1} X$), Schäden unter K_1 übernimmt Versicherung I voll.
   - Versicherung II übernimmt den Teil des Schadens über einer Selbstbehaltsgrenze K_2, d.h. $X_{II} = max\{X - K_2, 0\}$, Versicherung I übernimmt bei jeden Schaden den Betrag bis zum Selbstbehalt K_2.

   Hinweis: Die Eigenschaften der Exponentialverteilung könnten die Rechnungen sehr vereinfachen!

   (a) Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten, dass Versicherung II bei einem Schaden eine Zahlung zu leisten hat? (1)

   (b) Wie groß ist der erwartete Schaden, den Versicherung I und Versicherung II in den Szenarien jeweils zu übernehmen haben? (2)

   (c) Wenn Versicherung I das Exponentialprinzip mit Risikoaversionsparameter $a_I = 1.5$ und Versicherung II mit Risikoaversionsparameter $a_{II} = 1$ anwendet, wie hoch sind die jeweiligen Prämien in den drei Szenarien, abhängig von K_1 und K_2? Bestimme auch exemplarisch numerische Werte für einzelne Werte von K_1 und K_2. (3)