Name:

Mat.Nr.:

Kennz.:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

Risiko- und Ruintheorie
(Vorlesungsprüfung)
Jänner 2012
J. Eisenberg / F. Hubalek

(Dauer 90 Minuten, alle Unterlagen sind erlaubt)

Sie erhalten eine E-Mail mit dem schriftlichen Ergebnis, danach Anmeldung zur mündlichen Prüfung `fhubalek@fam.tuwien.ac.at`

Bsp.	Max.	Punkte
1	6	
2	6	
3	6	
$\sum$	18	

Schriftlich:

AssistentIn:

Mündlich:

Gesamtnote:

1. Betrachte das kollektive Modell der Risikotheorie mit Schadenanzahl N und Schadenhöhen $(X_k)_{k\geq 1}$, wobei (6 Pkt.)

$$P[N = n] = p(1-p)^{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

mit $p \in (0,1)$ und

$$P[X_1 > x] = e^{-ax}, \quad x \geq 0$$

mit $a > 0$ gelten soll.

(a) Berechnen Sie den Erwartungswertdes Gesamtschadens.

(b) Berechnen Sie die Varianz des Gesamtschadens.

(c) Für welche Parameter $\gamma > 0$ ist der Gesamtschaden nach dem Exponentialprinzip versicherbar? Berechnen Sie für diese Parameter die entsprechende Prämie.

(d) Finden Sie eine möglichst einfache und explizite Beschreibung für die Verteilung des Gesamtschadens.

(e) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz des dem Erstversicherer verbleibenden Gesamtschadens bei Excess of Loss (XL) Rückversicherung mit Parameter $b = 1/a$.

(f) Nun zu etwas anderem: Gegeben seien strikt positive austauschbare Zufallsvariable $X_1, \ldots, X_n$ mit $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Berechnen Sie[1]

$$\mathbb{E}\left[\frac{X_1}{X_1 + \cdots + X_n}\right]$$

für $n = 10$. (Das Ergebnis sollte ein konkreter Zahlenwert sein!)

2. Gegeben sind zwei exponentialverteilte Zufallsvariable Y_1 und Y_2 mit Erwartungswert 100, sowie die drei Risiken (6 Pkt.)

$$X_1 = Y_1 - 5, \quad X_2 = 6 - Y_2, \quad Z = 2X_1 + X_2.$$

(a) Berechnen Sie $\mathrm{VaR}_{0.1}(X_1)$.

(b) Berechnen Sie $\mathrm{VaR}_{0.1}(X_2)$.

(c) Welchen Wert hat $\mathrm{VaR}_{0.1}(2X_1)$?

(d) Angenommen $Y_1 = Y_2$. Bestimmen Sie nun $\mathrm{VaR}_{0.1}(Z)$.

(e) Angenommen Y_1 und Y_2 sind unabhängig. Bestimmen Sie[2] die Verteilungsfunktion von Z.

(f) Ermitteln Sie unter den Voraussetzungen von (e) den $\mathrm{VaR}_{0.1}(Z)$.

[1]Hinweis für Ratlose: Wie wirkt sich die Permutation $X_1, \ldots, X_n \mapsto X_2, \ldots, X_n, X_1$ auf den gesuchten Erwartungswert aus? Eine beliebige Permutation? Na also!

[2]Aus den Übungen wissen wir: Sind Y_1 und Y_2 zwei unabhängige exponentialverteilte Zufallsvariable mit Parametern $\lambda_1 > 0$ und $\lambda_2 > 0$ und gilt $\lambda_1 \neq \lambda_2$, dann hat $Y_1 - Y_2$ die Dichte

$$f(x) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\left(e^{-\lambda_1 x}\mathbb{1}_{x\geq 0} + e^{\lambda_2 x}\mathbb{1}_{x<0}.\right)$$

3. Gegeben sei ein Cramér-Lundberg-Modell mit Einzelschäden, die auf $(0, 1)$ stetig gleichverteilt sind. Die Prämienrate ist 1, die und die Intensität sei auch 1. (6 Pkt.)

   (a) Vergewissern Sie sich, dass der relative Sicherheitszuschlag positiv ist.

   (b) Ermitteln Sie eine (strikt positive) untere Schranke und eine obere Schranke für den Anpassungskoeffizienten R.

   (c) Wie können Sie die Ruinwahrscheinlichkeit mit der Cramer-Lundberg Ungleichung und unter Verwendung von (b) für Anfangskapital 1 abschätzen?

   (d) Geben Sie eine bessere Abschätzung. (Begründung!)

   (e) Ermitteln Sie in der asymptotischen Formel $\psi(x) \sim Ce^{-Rx}$ für $x \to \infty$ den Koeffizienten C. Sie müssen bei dieser Teilaufgabe keinen Zahlenwert angeben, sondern können C in Abhängigkeit von R schreiben.