Name:

Mat.Nr.:

Kennz.:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

Risiko- und Ruintheorie
(Vorlesungsprüfung)
31. Jänner 2013
J. Eisenberg / F. Hubalek

(Dauer 90 Minuten)

Sie erhalten eine E-Mail mit dem schriftlichen Ergebnis und Information zur mündlichen Prüfung.

Bsp.	Max.	Punkte
1	5	
2	5	
3	5	
$\sum$	15	

Schriftlich:

Assistent: P. Gruber

Mündlich:

Gesamtnote:

1. Gegeben sei ein Cramer-Lundberg-Prozess $(R_t)_{t\geq 0}$, also

$$R_t = x + ct - \sum_{i=1}^{N_t} X_i, \quad t \geq 0,$$

wobei $x \geq 0$ das Anfangskapital ist, $c \geq 0$ die Prämienrate, der Poisson-Prozess $(N_t)_{t\geq 0}$ den Parameter $\lambda > 0$ hat, und die Einzelschäden $(X_i)_{i\geq 1}$ Erwartungswert $\mu > 0$ haben sollen.

   (a) Angenommen $x = 1$, $c = 1$, $\lambda = 2$, und die Einzelschäden sind exponentialverteilt. Für welche Werte von μ ist der relative Sicherheitszuschlag positiv?

   (b) Angenommen, der relative Sicherheitszuschlag ist positiv.[1] Zeigen Sie, dass der Anpassungskoeffizient existiert.

   (c) Beschreiben Sie (ohne Beweis!) möglichst genau das Verhalten der Ruinwahrscheinlichkeit $\psi(x)$ für $x \to \infty$, wenn *(i)* $c < \lambda\mu$, *(ii)* $c = \lambda\mu$, *(iii)* $c > \lambda\mu$.

   (d) Seien $0 < T_1 < T_2 < \dots$ die Schadenankunftszeiten, $T_0 = 0$ und τ eine endliche Stoppzeit mit $P[\tau \neq T_k] = 1$ für alle $k \geq 0$. Beantworten Sie die folgenden Fragen durch Ankreuzen:

$T_{N_\tau} > \tau$ und $T_{(N_\tau - 1)_+} < \tau$	☐ wahr	☐ falsch	☐ hängt von τ ab
$T_{N_\tau} < \tau$ und $T_{N_\tau + 1} \geq \tau$	☐ wahr	☐ falsch	☐ hängt von τ ab
$T_{N_\tau} \leq \tau$ und $T_{N_\tau + 1} > \tau$	☐ wahr	☐ falsch	☐ hängt von τ ab

   (e) Beschreiben Sie T_{N_τ} mglichst anschaulich und einfach mit Worten, ohne mathematische Formeln und Ausdrücke!

[1] Sie können diese Aufgabe wahlweise für die konkreten Werte aus (a) oder allgemein behandeln.

2. (a) Sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, $\mathcal{F} = \mathfrak{P}(\Omega)$ und $P(\omega_1) = p$, $P(\omega_2) = 1 - p$, wobei $p \in (0,1)$. Sei $\mathcal{G}$ die Menge aller Risiken über Ω, also die Menge aller Funktionen $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Gegeben sei weiters ein Risiko $X \in \mathcal{G}$ mit $X(\omega_1) = x_1$ und $X(\omega_2) = x_2$, wobei $x_1 < x_2$ sein soll. Skizzieren Sie die Verteilungsfunktion $F_X(x)$ von X und berechnen Sie $\mathrm{VaR}_\alpha(X)$ für $\alpha \in (0,1)$.

(b) Berechnen Sie $\mathrm{ES}_\alpha(X)$ für $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $p = 0.05$ und $\alpha = 0.1$.

(c) Gegeben Sei weiters eine stetig differenzierbare, konvexe Funktion $f : [0,1] \to [0,1]$ mit $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$. Dann definieren wir[2] die Abbildung $\rho : \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ durch

$$\rho(X) = -\int_0^1 f'(1-t) q_X^+(t) dt.$$

Zeigen Sie, dass ρ translationsinvariant ist.

(d) Berechnen Sie $\rho(X)$ für das Risiko X aus Aufgabe (a).

(e) (Und nun zu etwas ganz anderem) Es sei $\rho : \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ ein monetäres Riskomaß und

$$\mathcal{A}_\rho = \{X \in \mathcal{G} : \rho(X) \leq 0\}.$$

Sei nun X ein Risiko aus $\mathcal{G}$. Beantworten Sie durch Ankreuzen:

$\{m : X + m \in \mathcal{A}_\rho\} = \mathbb{R}_+$	☐ richtig	☐ falsch	☐ hängt von X ab
$\{m : X + m \in \mathcal{A}_\rho\} = [\rho(X), \infty)$	☐ richtig	☐ falsch	☐ hängt von X ab
$\{m : X + m \in \mathcal{A}_\rho\} = (-\infty, \rho(X)]$	☐ richtig	☐ falsch	☐ hängt von X ab

[2] Sie wissen ja, $q_X^+(t) = \inf\{u \in \mathbb{R} : F_X(u) > t\}$.

3. (a) Ein Schaden X wird durch die Verteilungsfunktion

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ 1 - e^{-x} & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1. \end{cases}$$

beschrieben. Berechnen Sie die Nettoprämie.

(b) (Fortsetzung) Berechnen Sie die Prämie für X nach dem Varianzprinzip mit Parameter 0.1.

(c) (Und nun zu etwas ganz anderem) Betrachten Sie eine Zufallssumme S, bei der die Schadenanzahl Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda > 0$ ist, und die Einzelschäden die momentenerzeugende Funktion[3]

$$M_X(z) = \sum_{n \geq 0} m_n \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C},$$

besitzt. Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz von S.

(d) (Fortsetzung) Geben Sie einen möglichst einfachen Ausdruck für $M_S(z) = E[e^{zS}]$ und $M_S'(z)$ an.

(e) (Fortsetzung) Wir bezeichnen die Momente von S mit ν_n, also

$$\nu_n = E[S^n], \quad n \geq 0.$$

Finden Sie eine Rekursion, in der ν_{n+1} für $n \geq 0$ durch λ, $m_1, \ldots, m_{n+1}$ und $\nu_1, \ldots, \nu_n$ ausgedrückt wird.[4]

[3]Sie erinnern sich: Wenn M_X die momentenerzeugende Funktion von X ist, sind die m_n somit die ... von X.

[4]Hinweis: Die Leibnizsche Produktregel für die n-te Ableitung eins Produktes $u \cdot v$ lautet:

$$(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)} \cdot v^{(n-k)}.$$