Name:

Mat.Nr.:

Studienkennz.: ☐ Exchange student (Erasmus, ...)

Bitte keinen Rotstift verwenden!

105.042 Risikotheorie
Vorlesung, 2006W, 4.0h
25.Juni 2007
Hubalek

(Dauer 90 Minuten, alle Unterlagen sind erlaubt)

Anmeldung zur mündlichen Prüfung auf der Liste oder per E-Mail an den Vortragenden!

Bsp.	Max.	Punkte
1	5	
2	5	
3	5	
$\sum$	15	

1. Gegeben ist $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ mit $\mathcal{F} = \mathfrak{P}(\Omega)$ (Potenzmenge). Die Menge aller Risiken $\mathcal{G}$ besteht aus allen Funtionen $X : \Omega \to \mathbb{R}^2$ und kann und soll mit $\mathbb{R}^2$ identifiziert werden. Das heißt, eine Funktion X mit $X(\omega_1) = x_1$ und $X(\omega_2) = x_2$ wird als Punkt $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ dargestellt. Weiters sei $\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 \geq 0\}$. Vernachlässigen Sie die Verzinsung, rechnen Sie mit Zinsfaktor $r = 1$.
   (a) Zeigen Sie, daß $\mathcal{A}$ die Axiome für Akzeptanzmengen erfüllt.
   (b) Berechnen Sie das asoziierte Risikomaß $\rho_{\mathcal{A}}$. Also, gegeben $X : \Omega \to \mathbb{R}^2$ mit $X(\omega_1) = x_1$ und $X(\omega_2) = x_2$, wie groß ist $\rho_{\mathcal{A}}(X)$?
   (c) Ist $\rho_{\mathcal{A}}$ kohärent?

2. Gegeben sei ein klassischer Cramer-Lundberg-Ruinprozeß mit Anfangskapital x, Prämienrate c, Schadensintensität λ und Schäden, die exponentialverteilt mit Parameter μ sind.
   (a) Für welche Werte von μ ist der relative Sicherheitszuschlag positiv ist, wenn die anderen Parameter vorgegeben sind?
   (b) Angenommen der relative Sicherheitszuschlag ist positiv. Zeigen Sie, daß der Cramer-Lundberg-Koeffizient existiert.
   (c) Angenommen $x = 1$, $c = 1$, $\lambda = 2$, $\mu = 5$. Berechnen Sie den relativen Sicherheitszuschlag.
   (d) Geben Sie eine (nichttriviale) Abschätzung für die Ruinwahrscheinlichkeit an. (Begründen Sie Ihre Argumente für die Abschätzung!)
   (e) Sei $r > 0$ der Cramer-Lundberg-Koeffizient und $\psi(x)$ die Ruinwahrscheilichkeit bei Anfangskapital $x > 0$. Bestimmen Sie
   $$\lim_{x \to \infty} e^{rx} \psi(x)$$
   für die obigen Zahlenwerte.

3. Gegeben sei ein Gesamtschaden, mathematisch modelliert durch eine Zufallssumme S, bei der die Schadensanzahl Poisson-verteilt mit Parameter $\mu > 0$ ist und die Schäden eine diskrete Gleichverteilung[1] auf $\{a + 1, \ldots, b\}$ haben, wobei $0 \leq a < b$ ganze Zahlen sind.
   (a) Berechnen Sie die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion eines (einzelnen) Schadens.
   (b) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz des Gesamtschadens, wenn $\mu = 2$, $a = 0$, $b = 4$.
   (c) Berechnen Sie $P[S = k]$ für $k = 0, \ldots, 3$ wenn $\mu = 2$, $a = 0$, $b = 4$.

.

[1] Zur Erinnering: Eine Zufallsvariable X hat diskrete Gleichverteilung auf $\{a + 1, \ldots, b\}$, wenn

$$P[X = a + 1] = \ldots = P[X = b] = \frac{1}{b - a}$$

gilt. Die diskrete Gleichverteilung ist nicht mit der stetigen Gleichverteilung auf dem Intervall $[a, b]$ zu verwechseln!